$k=\bar{k}$ 为代数闭域

设 $I\subset k[x_1,\dots,x_n]$ 为根式理想，即 ~~V(I)~~ $\sqrt{I}=I$.

记 $A=\dfrac{k[x_1,\dots,x_n]}{I}$. 显然 $\forall f\in A$，$f$ 可看作 $V(I)$ 上的 $k$-值函数. 记 $D(f)=\{x\in V(I)\mid f(x)\neq 0\}$.

对 $A$ 中任一理想 $J\subset A$，记 $V(J)=\{x\in V(I)\mid f(x)=0, \forall f\in J\}$. 则 $V(J)$ 为 $V(I)$ 中闭子集. 容易验证：

① $\{D(f)\mid f\in A\}$ 为 $V(I)$ 的开集基

② $\forall f,g\in A$. $D(f)\subseteq D(g)\iff f\in\sqrt{(g)}$.

③ $\forall f_1,\dots,f_m, f\in A$, $\bigcup_{i=1}^{m}D(f_i)=D(f)$

$\iff \forall i=1,\dots,m$, $f_i\in\sqrt{(f)}$，且 $f\in\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(f_i)}$.

特别的，此时 $\exists n\geq 1$, $f^n\in\sum_{i=1}^{m}(f_i)$.

性质1：设 $f\in A$，记 $A(D(f))$ 为 $V(I)$ 的开集 $D(f)$ 上正则函数环. 自然同态 $A_f\longrightarrow A(D(f))$ 为 $k$-代数同构.

证明：不难看出上述同态为单同态. 从而只需证明其为满同态.

证：设 $F\in A(D(f))$. 由定义，$F$ 为 $D(f)$ 上 $k$-值函数. 且由 $D(f)$ 的紧性知存在有限个 $f_1,\dots,f_m\in A$，使得 $\bigcup_{i=1}^{m}D(f_i)=D(f)$. 且 $\forall i=1,\dots,m$. $\exists g_i\in A$，使得 $F|_{D(f_i)}=\dfrac{g_i}{f_i}\Big|_{D(f_i)}$.

由于 $\forall i,j=1,\cdots,m$，$\left.\frac{g_i}{f_i}\right|_{D(f_i)\cap D(f_j)} = \left.\frac{g_j}{f_j}\right|_{D(f_i)\cap D(f_j)}$

且 $D(f_i)\cap D(f_j)=D(f_if_j)$

$\Rightarrow$ $(g_if_j-g_jf_i)(f_if_j)$ 在 $V(I)$ 上处处取值为零

由 Hilbert 零点定理知在 $A$ 中 $(g_if_j-g_jf_i)(f_if_j)=0$.

由于 $D(f_i^2)=D(f_i)$，$\forall i=1,\cdots,m$

从而 $\bigcup_{i=1}^{m}D(f_i^2)=D(f)$，故由前一页的③知

$\exists n\geq 1$，以及 $h_1,\cdots,h_m\in A$，使得 $f^n=\sum_{i=1}^{m}h_if_i^2$.

令 $g=\sum_{i=1}^{m}h_if_ig_i\in A$.

我们要证 $\forall i=1,\cdots,m$，$\left.\frac{g}{f^n}\right|_{D(f_i)}=\left.\frac{f_ig_i}{f_i^2}\right|_{D(f_i)}=\left.\frac{g_i}{f_i}\right|_{D(f_i)}$

~~从而完成定理~~

事实上，$g\cdot f_i^2=\left(\sum_{j=1}^{m}h_jf_jg_j\right)f_i^2=\sum_{j=1}^{m}h_j\,g_jf_i\cdot f_if_j$

$=\sum_{j=1}^{m}h_j\,g_if_jf_if_j = g_if_i\cdot\sum_{j=1}^{m}h_jf_j^2=g_if_i\cdot f^n$.

$\forall i=1,\cdots,m$ 成立.

从而得到 $\left.\frac{g}{f^n}\right|_{D(f_i)}=\left.\frac{g_if_i}{f_i^2}\right|_{D(f_i)}=\left.\frac{g_i}{f_i}\right|_{D(f_i)}=F|_{D(f_i)}$.

$\forall i=1,\cdots,m$ 成立

从而 $F$ 具有形式 $\frac{g}{f^n}$，$g\in A$. 证毕. ∎

推论：在上述性质中取 $f=1\in A$，得到自然同态

$\frac{k[x_1\cdots x_n]}{I}=A\longrightarrow A(V(I))$ 为 $k$-代数同构，即 $V(I)$ 上

任一正则 $k$-值函数均为多项式函数.

推论：在上述性质1中取 $I=0$，则 $V(I)=k^n$.

而 $D(f)=\{x\in k^n \mid f(x)\neq 0\}$，$A=k[X_1,\cdots,X_n]$.

且得到 $k[X_1,\cdots,X_n]_f \longrightarrow A(D(f))$

为~~同构~~ $k$-代数同构.